Symmetry fractionalization による
典型的なエンタングルメント

八木 春樹 [1], 望月 健 [1,2], ゴン ゾンピン [1]

1)東京大学 工学系研究科 物理工学専攻 2)理研 CPR

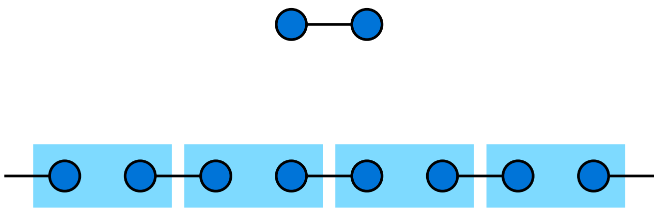
Keywords

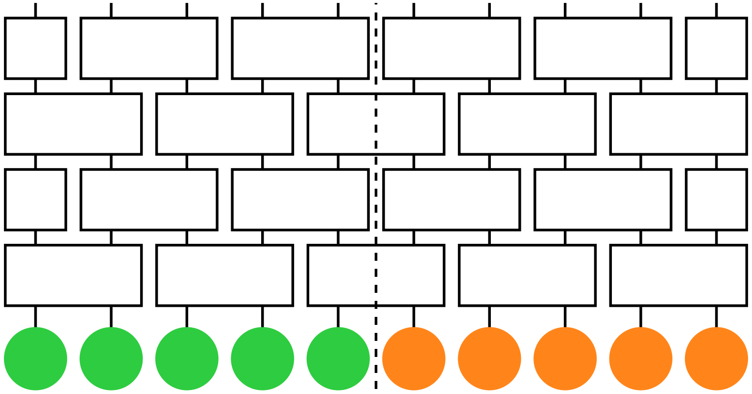
物理: 典型的量子状態、エンタングルメント、Symmetry fractionalization、SPT 相

数学: ランダム行列、群のユニタリ・反ユニタリ表現

背景

量子多体系の典型的なエンタングルメント





- 今回の興味は**典型的**な状態 = 全系の Hilbert 空間の一様ランダム状態
- Entanglement spectrum: 縮約密度行列 $\rho_{\text{sys}} = \mathrm{Tr}_{\text{env}} |\psi\rangle\langle\psi|$ の固有値

$\Rightarrow$ 厳密な評価: **ランダム行列**の Laguerre アンサンブル[1]

[1](Foong & Kanno, 1994; Page, 1993; Sen, 1996; Sánchez-Ruiz, 1995)

ランダム行列の Laguerre unitary ensemble

全系の Hilbert 空間から一様ランダムな状態を準備[2]

$$\text{i.i.d. } W_{\text{sys,env}} \sim \mathcal{CN}(0,1),\ |\Psi\rangle = \sum_{\text{sys,env}} W_{\text{sys,env}} |\text{sys,env}\rangle \Rightarrow \rho_{\text{sys}} = WW^\dagger$$

⇒ランダム行列の **Laguerre unitary ensemble (LUE)**

ρ_{sys} の固有値 λ の同時分布は$\beta = 2$の Laguerre 分布:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \propto \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} e^{-\lambda_i} \prod_{1 \le i < j \le m} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

[2](Forrester, 2010; Nechita, 2007; Zyczkowski & Sommers, 2001)

時間反転対称性と Laguerre アンサンブルの Threefold Way

$$p(\lambda_1, ..., \lambda_m) \propto \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} e^{-\lambda_i} \prod_{1\leq i<j\leq m} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta}$$

時間反転対称性(TRS): $\mathcal{T}\rho_{\mathrm{sys}}\mathcal{T}^{-1} = \rho_{\mathrm{sys}}$ を課すと、$\beta = 2$の他に$\beta = 1, 4$

Laguerre アンサンブルの Threefold way[3]

	$\mathcal{T}_+^2 = +\mathbb{1}$ $(\mathcal{T}_+ \simeq K)$	No TRS	$\mathcal{T}_-^2 = -\mathbb{1}$ $(\mathcal{T}_- \simeq \sigma_y K)$	
	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 4$	
Laguerre	**orthogonal**,	**unitary**,	**symplectic**	ensemble
	LOE	**LUE**	**LSE**	
$\|\Psi\rangle$:	実ベクトル	複素ベクトル	**未知** [4]	

[3]Dyson, 1962: Hamiltonian に対する threefold way

[4]Kramers の定理: $\mathcal{T}_-^2 = -\mathbb{1}$の時間反転演算子は固有状態を持たない

問題の整理とその解決

問題と解答

Q1. ρ_{sys}の固有値分布が **LSE** に従う量子系はあるか?

Q2. **一般の対称性**を課すと Threefold way 以外が現れるか?

問題と解答

Q1. ρ_{sys}の固有値分布が **LSE** に従う量子系はあるか?
A1. ある。LOE の設定で **TRS を fractionalize** すればよい。

Q2. **一般の対称性**を課すと Threefold way 以外が現れるか?
A2. 現れない。すべて **Threefold way の直和**に帰着する。

1. LSE になる量子系を探す

要求	$\mathcal{T}_+\rho_{\mathrm{sys}}\mathcal{T}_+^{-1} = \rho_{\mathrm{sys}}$	$\mathcal{T}_-\rho_{\mathrm{sys}}\mathcal{T}_-^{-1} = \rho_{\mathrm{sys}}$
純粋状態の存在	Yes, $\mathcal{T}_+\|\Psi\rangle = \|\Psi\rangle$	**No**, $\mathcal{T}_-\|\Psi\rangle \neq \|\Psi\rangle$
全系の純粋状態	実ベクトル	**???**

$$\Downarrow$$

時間反転対称性の **fractionalization**

$$\mathcal{T}^2 = [\mathcal{T}_S \otimes \mathcal{T}_E]^2 = +\mathbb{1}$$

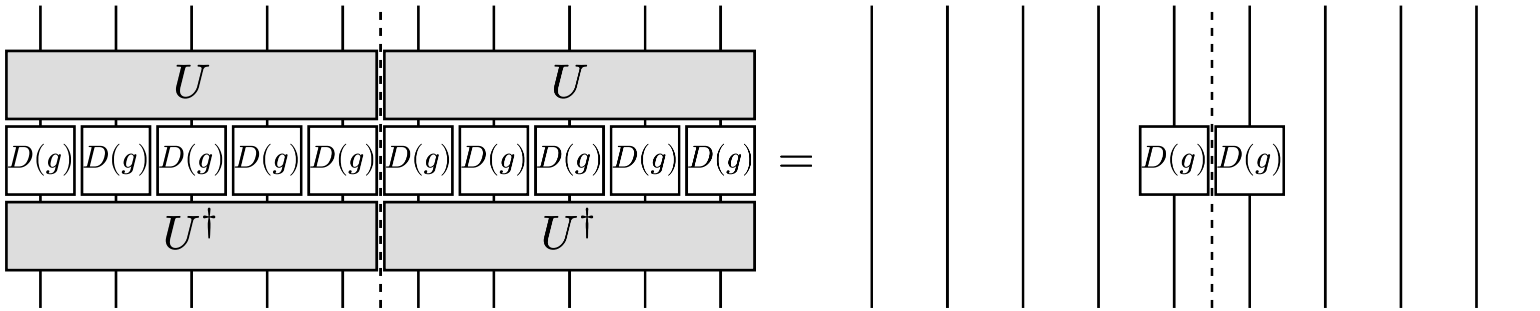
$$\swarrow \quad \mathcal{T} = \Upsilon(\mathcal{T}_S \otimes \mathcal{T}_E)\Upsilon^\dagger \quad \searrow$$

$$\boxed{\mathcal{T}_S^2 = -\mathbb{1}} \qquad \boxed{\mathcal{T}_E^2 = -\mathbb{1}}$$

Υ: LOE の TRS 純粋状態を fractionalize $\to$ LSE が構成できる?

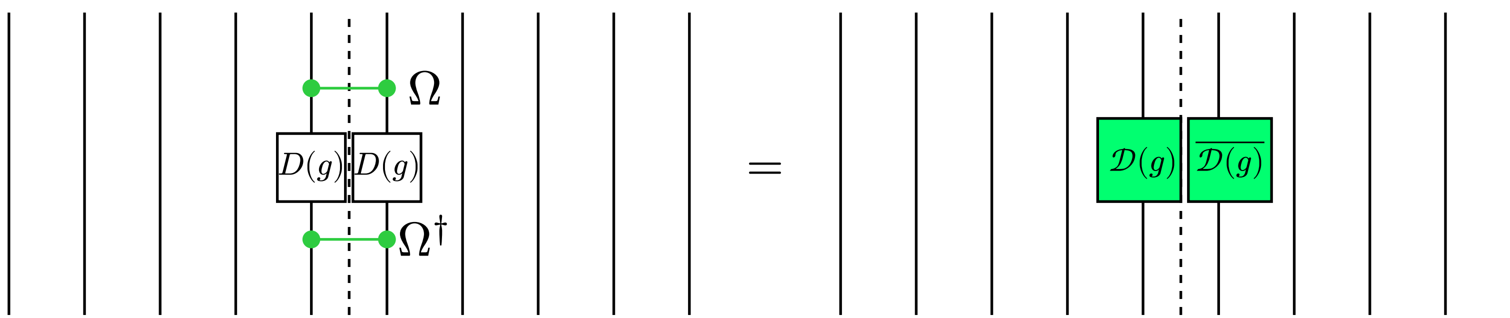
2. 一般の対称性を満たす状態をどのように構成するか

- Entanglement spectrum は unitary 不変⇒単純化
- 空間次元によらずオンサイト対称性を 1 サイトに凝縮可能



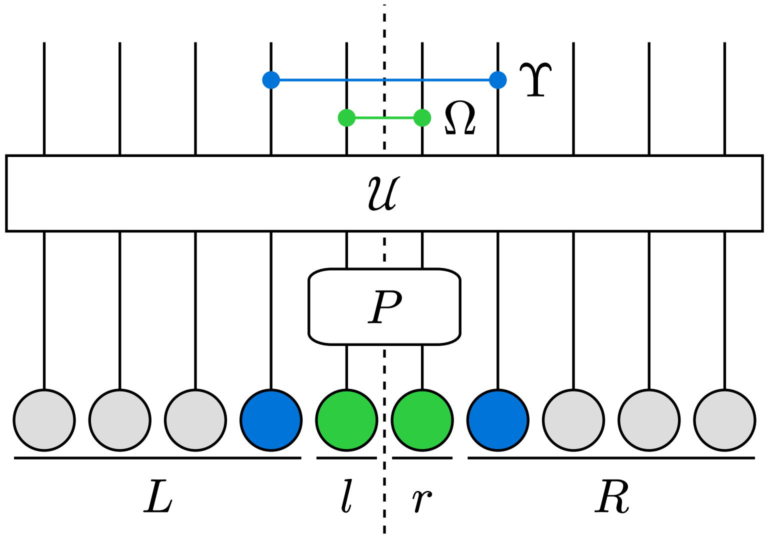
TRS のΥに対応するΩがあれば、G_0 も fractionalize 可能

=線型表現$D\otimes D$を**射影表現**[5]$\mathcal{D}\otimes\overline{\mathcal{D}}$に変換する操作



[5] $\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(h)=\omega(g,h)\mathcal{D}(gh),\ \omega\in U(1)$

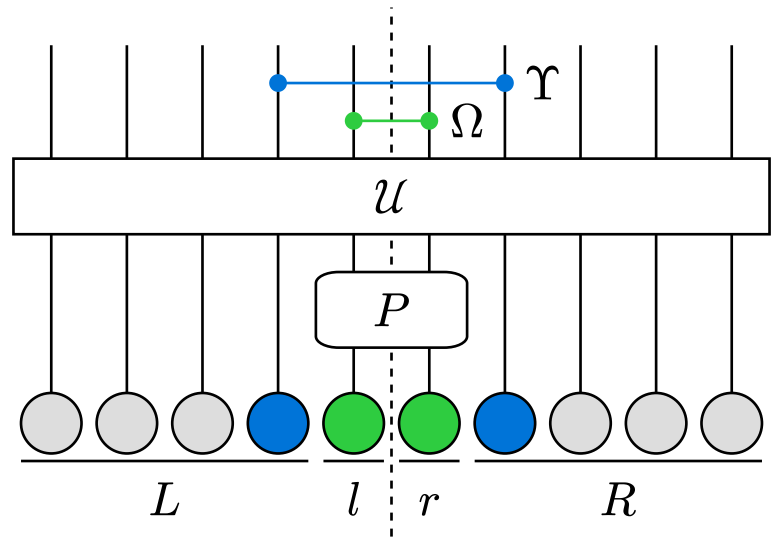
一般的な設定



- $G = G_0$ or $G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2^{\mathcal{T}}$ (G_0: unitary, $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{T}}$: anti-unitary)
- l, r: それぞれ$|G_0|$次元 (正規表現:基底は$\langle g|g'\rangle = \delta_{g,g'}$)
- P: $l \cup r$ の $|G_0|^2$ 次元空間を以下のG_0-対称な基底が張る $|G_0|$ 次元空間に射影:

$$\forall g \in G_0,\ |\psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G_0|}} \sum_{h \in G_0} |hg\rangle |h\rangle$$

一般的な設定



- $\mathcal{U} \sim$ 射影された$d_L d_R |G_0|$次元空間の Haar 測度、L, l, r, R をもつれさせる:

$$|\Psi\rangle = \sum_{L,g\in G_0,R} c_{L,g,R}|L\rangle|\psi_g\rangle|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G_0|}} \sum_{L,g_l,g_r,R} c_{L,g_r^{-1}g_l,R}|L\rangle|g_l\rangle|g_r\rangle|R\rangle$$

- Ωは G_0 を、Υは$\mathbb{Z}_2^{\mathcal{T}}$をそれぞれ fractionalize

$$\Omega = \sum_{g_l,g_r} \omega(g_r, g_r^{-1}g_l)|g_l, g_r\rangle\langle g_l, g_r|, \ \Upsilon = \frac{1-i}{2}(\mathbb{1}_4 - i\sigma_y \otimes \sigma_y)$$

結果と結論

Threefold way への直和分解

Entanglement spectrum の統計は、$G = G_0$のとき、

$$\bigoplus_{\alpha}\left[\frac{\mathbb{1}_{d_\alpha}}{d_\alpha}\otimes \mathbf{LUE}_{\alpha}^{d_L d_\alpha \times d_R d_\alpha}\right],$$

$G = G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2^{\mathcal{T}}$のとき、

$$\left[\bigoplus_{\alpha:R_1}\frac{\mathbb{1}_{d_\alpha}}{d_\alpha}\otimes \mathbf{LOE}_{\alpha}^{d_L d_\alpha \times d_R d_\alpha}\right]\oplus\left[\bigoplus_{\alpha:R_0}\frac{\mathbb{1}_{2d_\alpha}}{d_\alpha}\otimes \mathbf{LUE}_{\alpha}^{d_L d_\alpha \times d_R d_\alpha}\right]\oplus\left[\bigoplus_{\alpha:R_{-1}}\frac{\mathbb{1}_{d_\alpha}}{d_\alpha}\otimes \mathbf{LSE}_{\alpha}^{d_L d_\alpha \times d_R d_\alpha}\right].$$

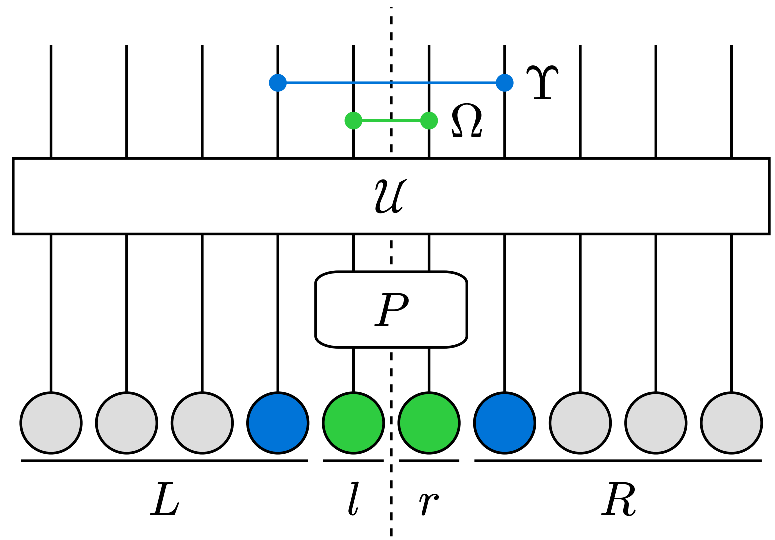
一般の**対称性を課しても**

Laguerre アンサンブルの **Threefold way への分解で書き尽くせる** [6]

---

[6]Dyson (1962) の Gaussian threefold way の Laguerre version

結論



従来

- LSE に従う系は**未知**だった

本研究

- LOE の**時間反転対称性を fractionalize** することで LSE を構成できた
- LSE の構成を広いクラスの**対称性に一般化**した
- Entanglement spectrum の統計が **Threefold way で書き尽くせる**ことを示した

参考文献

Foong, S. K., & Kanno, S. (1994). Proof of Page's conjecture on the average entropy of a subsystem. *Phys. Rev. Lett.*, *72*(8), 1148–1151. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1148

Forrester, P. J. (2010). *Log-gases and random matrices (LMS-34)*. Princeton university press.

Nechita, I. (2007). Asymptotics of random density matrices. *Annales Henri Poincaré*, *8*, 1521–1538.

Page, D. N. (1993). Average entropy of a subsystem. *Phys. Rev. Lett.*, *71*(9), 1291–1294. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1291

Sen, S. (1996). Average Entropy of a Quantum Subsystem. *Phys. Rev. Lett.*, *77*(1), 1–3. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1

Sánchez-Ruiz, J. (1995). Simple proof of Page's conjecture on the average entropy of a subsystem. *Phys. Rev. E*, *52*(5), 5653–5655. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.5653

Zyczkowski, K., & Sommers, H.-J. (2001). Induced measures in the space of mixed quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *34*(35), 7111–7112.

補足資料

群コホモロジーと SPT 相

Symmetry fractionalization

$$\forall g, g' \in G,\ D(g)D(g') = D(gg')$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\boxed{\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g') = \omega(g,g')\mathcal{D}(gg')} \quad \boxed{\mathcal{D}'(g)\mathcal{D}'(g') = \overline{\omega(g,g')}\mathcal{D}'(gg')}$$

2-cocycle ω の同値を各元の位相変換 $\mathcal{D}_{\mathrm{new}}(g) = e^{i\phi(g)}\mathcal{D}(g)$ で定義 $\to$ **同値類**

この同値類に応じて対称性に保護されたトポロジカル相(SPT 相)が分類される

群の 2-cocycle の同値類 : 2 次群コホモロジー $H^2(G, U(1))$

Kramers の定理

Q. 全系の $(uK)^2 = \pm\mathbb{1}$ TRS 純粋状態からそれぞれ LOE, LSE のρ_{sys}を構成できる?

A. LOE は可能、LSE は **TRS 状態が定義できない**ので不可能

Proof (LOE):

$(uK)^2 = 1$のとき、$w_{s,e}$を複素正規分布ではなく実正規分布からサンプルすれば、$u = \mathbb{1}$より$uK\rho_{\mathrm{sys}}Ku^\dagger = \overline{\rho_{\mathrm{sys}}} = \rho_{\mathrm{sys}}$にできるので、$\beta = 1$となる。 □

Proof (LSE):

$(uK)^2 = -1$のとき、全系の TRS 純粋状態$|\Psi\rangle$が存在すると仮定すると、

時間反転$\mathcal{T}$を作用した状態と元の状態が同じであることから、

$\langle\Psi|\mathcal{T}\Psi\rangle \neq 0$であるはず (ここで$uK|\Psi\rangle = |\mathcal{T}\Psi\rangle$)。

反ユニタリ演算子の定義から$\langle\Psi|\mathcal{T}\Psi\rangle = \left\langle\mathcal{T}^2\Psi\middle|\mathcal{T}\Psi\right\rangle$、

$(uK)^2 = -1$から$\left\langle\mathcal{T}^2\Psi\middle|\mathcal{T}\Psi\right\rangle = -\langle\Psi|\mathcal{T}\Psi\rangle$、従って$\langle\Psi|\mathcal{T}\Psi\rangle = -\langle\Psi|\mathcal{T}\Psi\rangle = 0.$

矛盾するので、全系の TRS 純粋状態は定義できない(**Kramers の定理**)。 □